T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
KOLOKWIUM I

Wrocław, 30 kwietnia 2010

ZADANIE 1 a. Udowodnij, że ciąg rekurencyjny

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{e^{a_n}}{3}$$

jest zbieżny (nie obliczając granicy). *Wsk. Oczywiście najważniejszy jest tu odpowiedni dobór dziedziny!*

ROZWIĄZANIE: Przestrzeń $X = (-\infty, 1]$, odwzorowanie $f(x) = \frac{e^x}{3}$. Sprawdzamy czy $f : X \to X$. Dla $x \in X$, czyli $x \leq 1$ mamy $f(x) \leq \frac{e}{3} < 1$, czyli $f(x) \in X$. Zbliżanie: $|f'(x)| = |\frac{e^x}{3}| \leq \frac{e}{3} < 1$. Z Twierdzenia Banacha, ciąg zbiega do punktu stałego.

ZADANIE 1 b. Na płaszczyźnie zadajemy odwzorowanie

$$(x, y) \to (\tfrac{x+y}{3}, \tfrac{2x}{3})$$

Czy jest to odwzorowanie zbliżające w metryce ,,suma" i czy jest to odwzorowanie zbiżające w metryce ,,supremum"?

ROZWIĄZANIE: Meryka "suma" to to samo co metryka taksówkowa. Dla d_{suma}:

$$d_{suma}(f((x, y)), f((x', y'))) = |\tfrac{(x-x')+(y-y')}{3}| + \tfrac{2}{3}|x - x'| \leq |x - x'| + \tfrac{1}{3}|y - y'|.$$

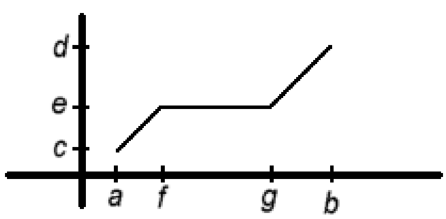
Jeśli $y = y'$ to odległość się nie zmniejszy, więc NIE jest to odwzorowanie zbliżające. Dla d_{sup}:

$$d_{sup}(f((x, y)), f((x', y'))) = \sup\big\{|\tfrac{(x-x')+(y-y')}{3}|, \tfrac{2}{3}|x - x'|\big\} \leq$$
$$\tfrac{2}{3}\sup\{|x - x'|, |y - y'|\} = \tfrac{2}{3}d_{sup}((x, y), (x', y')).$$

Tym razem jest to odwzorowanie zbliżające ze stałą $\frac{2}{3}$.

ZADANIE 2 a. Podaj przykład funkcji ciągłej i surjektywnej $f : X \to Y$ i zbioru gęstego $B \subset Y$, którego przeciwobraz nie jest gęsty w X.

ROZWIĄZANIE: Możliwości jest wiele. Oto jedna z nich: Funkcja na rysunku jest ciągłą surjekcją z $X = [a, b]$ na $Y = [c, d]$. Zbiorem gęstym w Y jest $Y \setminus \{e\} = [c, e) \cup (e, d]$, a jego przeciwobraz $[a, f) \cup (g, b]$ nie jest gęsty w X.



ZADANIE 2 b. Podaj przykład funkcji ciągłej i surjektywnej $f : X \to Y$ i zbioru otwartego $U \subset X$, którego obraz nie jest otwarty w Y.

ROZWIĄZANIE: Możliwości jest wiele. Oto jedna z nich: Na tym samym rysunku, co w rozwiązaniu zadania 2 a., weźmy $U = (f, g)$. Jego obraz, to zbiór jednopunktowy $\{e\}$ i nie jest to zbiór otwarty.

ZADANIE 3 a. Udowodnij, że jeśli $f : X \to Y$ jest homeomorfizmem, f^{-1} jest jednostajnie ciągła i X jest zupełna, to Y też jest zupełna.

ROZWIĄZANIE: Niech (y_n) będzie dowolnym ciągiem podstawowym w Y. Niech $x_n = f^{-1}(y_n)$. Pokażemy najpierw, że ciąg (x_n) jest podstawowy. Ustalmy dowolny $\epsilon > 0$. Z jednostajnej ciągłości funkcji f^{-1} istnieje δ takie, że $d_Y(y, y') < \delta \implies d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) < \epsilon$. Z podstawowości ciągu (y_n) istnieje n_0 takie, że dla każdych $n, m \geq n_0$ mamy $d_Y(y_n, y_m) < \delta$, a wtedy

$$d_X(x_n, x_m) = d_X(f^{-1}(y_n), f^{-1}(y_m)) < \epsilon,$$

a więc ciąg (x_n) jest rzeczywiście podstawowy. Z zupełności X, istnieje granica $x = \lim_n x_n$. Teraz z ciągłości funkcji f mamy $\lim_n f(x_n) = f(x)$. Ale $f(x_n) = y_n$, więc pokazaliśmy, że ciąg (y_n) zbiega do $f(x)$, czyli jest zbieżny, a to nam było potrzebne do wykazania zupełności Y.

ZADANIE 3 b. Udowodnij, że jeśli $f : X \to Y$ jest jednostajnie ciągła, to obraz każdego ciągu podstawowego jest podstawowy. Czy to oznacza implikację X zupełna to Y zupełna?

ROZWIĄZANIE: Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem podstawowym w X. Niech $y_n = f(x_n)$. Mamy pokazać odstawowość ciągu (y_n). Ustalmy dowolny $\epsilon > 0$. Z jednostajnej ciągłości f istnieje δ takie, że $d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$. Z podstawowości ciągu (x_n) istnieje n_0 takie, że dla każdych $n, m \geq n_0$ mamy $d_X(x_n, x_m) < \delta$, a wtedy

$$d_Y(y_n, y_m) = d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon,$$

a więc ciąg (y_n) jest rzeczywiście podstawowy.
Z tego NIE wynika zupełność Y (przy założeniu zupełności X). Na przykład funkcja $\mathrm{arctg}(x)$ jest jednostajnie ciągłym homeomorfizmem prostej (a więc przestrzeni zupełnej) na odcinek otwarty $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, który zupełny nie jest.

ZADANIE 4 a. Skonstruuj dowolną izometrię z $C([0, 1])$ w (nie na) zbiór ciągów rzeczywistych ograniczonych, z metryką supremum.

ROZWIĄZANIE: Możliwości jest wiele. Przykładowo, dla danej funkcji f ciągłej na odcinku $[0, 1]$ weźmy ciąg $(a_n) = f(q_n)$, gdzie q_n to ponumerowane w ciąg liczby wymierne z tego odcinka. Izometrią jest przyporządkowanie funkcji f tego właśnie ciągu. Czy jest to izometria? Odległość ciągów przypisanych dwóm funkcjom, to supremum odległości tych funkcji po liczbach wymiernych z odcinka, a więc jest nie większa niż odległość tych funkcji w metryce supremum. Z drugiej strony odległość funkcji jest osiągana jako supremum tylko po liczbach wymiernych, co łatwo wynika z ciągłości obu funkcji oraz tego, że liczby wymierne tworzą zbiór gęsty.

ZADANIE 4 b. Ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Skonstruuj dowolny homeomorfizm pomiędzy $\mathbb{R}^n$ (np. z metryką euklidesową), a wybranym przez Ciebie podzbiorem przestrzeni funkcyjnej $C([0,1])$.

ROZWIĄZANIE: Możliwości jest wiele. Oto dwie najprostsze: Ustalmy dowolne n różnych punktów $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ na odcinku $[0,1]$, w tym $x_1 = 0$ i $x_n = 1$. Mając punkt z przestrzeni $\mathbb{R}^n$, czyli wektor $(a_1, a_2 \ldots, a_n)$ tworzymy funkcję łamaną przechodzącą przez punkty $(x_1, a_1), (x_2, a_2), \ldots, (x_n, a_n)$. Homeomorfizmem jest przyporządkowanie każdemu wektorowi właśnie tej funkcji łamanej. Obrazem jest zbiór wszytkich takich łamanych. Sprawdzenie, że to jest homeomorfizm, jest elementarne. Jest to nawet izometria, jeśli w $\mathbb{R}^n$ weźmie się metrykę supremum. Wynika to z tego, że odległość w metryce supremum dwóch takich łamanych jest osiągana w jednym z punktów (x_i).
Inna możliwość, to przypisanie wektorowi $(a_1, a_2 \ldots, a_n)$ wielomianu stopnia $n-1$ zadanego wzorem $f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \cdots + a_n x^{n-1}$. Obrazem jest zbiór wszystkich wielomianów stopnia $n-1$. Różnowartościowość wynika z jednoznaczności postaci kanonicznej wielomianu. Ciągłość w metryce supremum wynika z elementarnych oszacowań o ile zmienić sie może wartość wielomianu w dowolnym punkcie x, gdy jego współczynniki zmienimy o nie więcej niż δ (każdy). Wyjdzie $n\delta$ (bo wszystkie liczby x^i są mniejsze lub równe 1.

ZADANIE 5 a. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej (X, d) spełniającym warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(a_n, a_{n+1}) < \infty.$$

Czy ciąg ten musi być podstawowy?

ROZWIĄZANIE: Odpowiedź jest TAK. Niech $n < m$. Z wielokrotnego złożenia warunku trójkąta mamy

$$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{\infty} d(a_k, a_{k+1}),$$

a to, jako ,,ogon" szeregu zbieżnego, dąży po n do zera. Zatem $d(a_n, a_m) < \epsilon$, o ile tylko n (a więc i m) są większe od pewnego n_0. Zatem nasz ciąg jest podstawowy.

ZADANIE 5 b. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d) spełniającym warunek

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{n+1}) = 0.$$

Czy ciąg ten musi być zbieżny?

ROZWIĄZANIE: Odpowiedź brzmi NIE. Niech na przykład $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Wiadomo, że $a_n \to \infty$, więc w przestrzeni zupełnej $\mathbb{R}$ ciąg ten jest rozbieżny, mimo że

$$d(a_n, a_{n+1}) = |a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$